Fioravante PATRONE

APPUNTI DI
ANALISI MATEMATICA I

per

SCIENZE DELL'INFORMAZIONE

A.A. 1993/94

CAPITOLO I

I NUMERI REALI

1. I numeri razionali: proprietà formali delle operazioni e della relazione d'ordine

Cominceremo col richiamare un po' di proprietà e di terminologia relativa ai numeri.

Ci sono i numeri "naturali": 1, 2, 3, ... Poi i numeri interi (vale a dire, i naturali cui aggiungiamo lo 0 e i numeri negativi). I numeri interi vengono anche detti numeri relativi, o numeri interi col segno. Ricordiamo che tra numeri interi si può sempre fare la sottrazione, ma la divisione no.

L'idea che si usa per poter fare "comunque" la divisione, è quella di introdurre le frazioni. Un modo curioso di procedere: visto che uno non sa fare la divisione tra 3 e 5, la lascia indicata (cambia solo simbolo, cioè scrive 3/5 anziché 3:5). Eppure, funziona. Non è comunque questa l'unica ragione per introdurre i numeri razionali (cioè le frazioni). E' chiaro che servono i numeri decimali se si vuole affrontare il problema della misura (non è altro che un confrontare multipli e sottomultipli...). Ricordiamo che i numeri decimali sono "l'altra faccia" delle frazioni. In effetti i numeri decimali non sono altro che un modo per rappresentare una frazione che ha a denominatore una potenza di 10. Ma questo va bene solo per i decimali finiti. Invece se facciamo la divisione di 1 per 3, non ci fermiamo mai: otteniamo un numero decimale illimitato. Con una caratteristica, però: è periodico. Anzi, dovrebbe essere noto che i numeri razionali (le frazioni, cioè) coincidono proprio con i numeri decimali finiti o periodici. Anche se pochi se la ricordano con esattezza, più o meno tutti sanno che c'è una regola per passare da un numero decimale periodico alla sua frazione generatrice. Di meno sanno come si faccia a garantire che da una divisione tra numeri interi viene fuori necessariamente un numero decimale finito o periodico, anche se la dimostrazione non è difficile. Ancor meno sanno che l'essere decimale finito o infinito dipende dal sistema di numerazione usato (per esempio: 1/5 con la numerazione binaria viene $0.001100110011\ldots$ cioè $0.\overline{0011}$).

Comunque, ricapitolando, abbiamo a disposizione i cosiddetti numeri razionali (ovverossia le frazioni, ovverossia i numeri decimali finiti o periodici). Con questi possiamo fare tutte e quattro le operazioni. Vi è un solo problema: non possiamo dividere per 0 .

Quello che è importante richiamare, a questo punto, per quanto verrà in seguito, sono le cosiddette "proprietà formali" delle operazioni. Di queste, la piú famosa è la proprietà commutativa: è $x+y=y+x$, qualunque siano i numeri razionali x ed y . Essa vale non solo per l'addizione ma anche per la moltiplicazione (la formuletta recita: "invertendo l'ordine dei fattori il prodotto non cambia"). Ma c'è un'altra proprietà importante, anche se meno famosa: la proprietá associativa, valida anch'essa sia per l'addizione che per la moltiplicazione. E' utile per potere scrivere con poche parentesi: per l'addizione ci dice che $x+(y+z) = (x+y)+z$, qualunque siano x, y e z . Analogamente per la moltiplicazione.

Le altre proprietà formali delle operazioni da mettere in evidenza sono forse meno conosciute, ma non meno importanti. Anzi, ad esse è legato il punto di vista più "moderno", che riduce il numero delle operazioni da 4 a 2. Basta riflettere su cosa significhi fare $7-5$: significa sommare a 7 l'opposto di 5 . Idem, $7/5$ significa moltiplicare 7 per il reciproco di 5 .

Vediamo le proprietà formali connesse a questo approccio, cominciando con l'addizione. Esiste un elemento speciale con la curiosa proprietà che sommato a qualsiasi numero lo lascia invariato. Si tratta evidentemente dello 0 , detto anche "elemento neutro della somma". Cioè: per ogni numero x razionale si ha: $x+0=x$. Possiamo sfruttare la presenza dello zero per introdurre l'idea di "opposto": infatti, per ogni numero razionale ce n'è un altro (il suo opposto) t.c. sommato a lui dà come risultato 0 . Ad esempio, $1/3$ ha come opposto $-1/3$; $-5/7$ ha come opposto $5/7$, etc. A questo punto, come già detto, non abbiamo più bisogno dell'operazione di sottrazione: interpreteremo $x-y$ come $x+(-y)$, dove $-y$ indica l'opposto di y .

Cose del tutto analoghe valgono per l'operazione di moltiplicazione. C'è l'elemento neutro, che stavolta è 1 , e poi ogni numero razionale (con l'eccezione di 0) ha il reciproco. E la divisione, $x:y$, viene semplicemente letta come $x\cdot(1/y)$, dove $1/y$ indica il reciproco di y (ovviamente con $y\neq 0$) .

A questo punto, spero di avere messo in evidenza quanto mi interessava, e cioè che sui razionali sono definite due operazioni: addizione e moltiplicazione. Esse godono delle proprietà formali sopra evidenziate. Vi è però una ulteriore proprietà che va ricordata, il cui ruolo è altrettanto essenziale delle precedenti, ma che ha una caratteristica diversa. Essa infatti coinvolge direttamente <u>entrambe le operazioni</u>. Si tratta della proprietà distributiva: $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$ (che vale qualunque siano i numeri razionali x, y e z).

Vedremo in seguito che queste proprietà sono centrali anche per i numeri reali.

Passiamo ora ad esaminare un altro aspetto dei numeri razionali: l'ordinamento. Cioè l'argomento "disequazioni". Viene spesso sottovalutata o non adeguatamente compresa l'importanza della relazione d'ordine sui razionali: vale allora la pena di ricordare che essa è alla base del processo stesso di misurazione. Invito a riflettere su cosa significhi dire che una sbarra è lunga 1.2 metri oppure 1.28 metri.

Come è noto, vi sono quattro simboli a disposizione per l'ordinamento: "$\leq$" (minore o uguale), "$\geq$" (maggiore o uguale), "$<$" (minore) e "$>$" (maggiore). Per ragioni di chiarezza e per facilità di esposizione nel seguito, userò solo un simbolo, cioè quello di "$\leq$" , per discutere le proprietà dell'ordinamento.

Intanto per cominciare, la relazione di minore o uguale gode delle tre proprietà chiave che identificano una <u>relazione d'ordine</u>. E cioè la proprietà riflessiva, antisimmetrica e transitiva.

Presi infatti tre numeri razionali x, y e z , si ha che:

i) $x \leq x$ (proprietà riflessiva)

ii) se $x \leq y$ e $y \leq x$, allora $x = y$ (proprietà antisimmetrica)

iii) se $x \leq y$ e $y \leq z$, allora $x \leq z$ (proprietà transitiva)

Queste tre proprietà formali sono quelle che identificano una relazione come relazione d'ordine. Non è certo il $\leq$ in $\mathbb{Q}$ l'unica relazione che gode di quelle proprietà: esse sono soddisfatte anche dalla relazione "essere contenuto in" ($\subseteq$) tra insiemi. Però essa non gode di una ulteriore proprietà, cioè quella di essere "totale". Presi comunque due insiemi A e B , non è sempre necessariamente vero che sia $A \subseteq B$ o $B \subseteq A$: possono cioè essere false entrambe le relazioni. Ad esempio, se $A = \{\text{Piero, Mario}\}$ e $B = \{\text{Piero, Giovanna}\}$. I numeri razionali invece sono sempre confrontabili tra loro. Cioè, presi due numeri razionali x e

y si ha che

iv) $x \leq y$ oppure $y \leq x$ (proprietà totale)

Si noti l'uso di "oppure", che non è da intendersi nella sua accezione "esclusiva" (corrisponde al latino "vel" , nonché ad "or" nella cosiddetta "logica circuitale"). In altre parole, puó essere benissimo vero sia $x \leq y$ che $y \leq x$ (ad esempio, se $x = y = 4$).

Le quattro proprietà precedenti, identificate con i numeri i)÷iv) , ci dicono che il $\leq$ è una relazione d'ordine totale sull'insieme dei numeri razionali.

Anche qui, peró, non ci si può soffermare solo sulle proprietà del $\leq$ a sé stante. Così come prima avevamo messo in evidenza la proprietà distributiva, che "lega" tra di loro le due operazioni di addizione e di moltiplicazione, così ora ricordiamo due importanti proprietà che "legano" tra loro la relazione d'ordine e le due operazioni.

Si sa che, presi comunque tre numeri razionali x, y e z :

se $x \leq y$, allora $x+z \leq y+z$

se $x \leq y$ e $0 \leq z$, allora $x \cdot z \leq y \cdot z$.

Tutto qui. Abbiamo finito il ripasso delle proprietà chiave dei razionali che ci interessano. Ci interessano perchè le analoghe proprietà per i numeri reali, con l'aggiunta di una sola ulteriore proprietà, saranno tutto quello di cui avremo bisogno per costruire l'edificio dell'analisi.

2. I numeri reali: gli assiomi

Da quanto abbiamo detto in precedenza, dovrebbero essere evidenti due caratteristiche di questo paragrafo. Una caratteristica è la sua importanza cruciale, chiave per tutto quello che vedremo in seguito. Un'altra caratteristica è che questo paragrafo ed i successivi sono astratti, di comprensione probabilmente faticosa. Per cui potrebbe essere un'utile strategia di studio ritornare su questo primo capitolo piú volte: con questo non invito a leggerlo in modo superficiale, ma dico solo che una sua rilettura potrebbe essere proficua dopo aver visto altre cose (per esempio, dopo aver fatto i limiti di successioni, o dopo aver visto il teorema sulle successioni monotone, o dopo aver acquisito un po' di esperienza dal corso parallelo di algebra).

Quello che normalmente viene indicato col nome di "numeri reali" è un costrutto matematico costituito da un insieme sul quale vengono definite due operazioni e una relazione che godono di certe proprietà. Più precisamente, abbiamo la seguente:

<u>Definizione 1</u> I "numeri reali" sono un insieme, che usualmente viene indicato con $\mathbb{R}$, sul quale sono definite due operazioni, indicate con $+$ e $\cdot$ rispettivamente, ed una relazione indicata con $\leq$. Esse godono delle proprietà 1÷16 elencate nella tabella che si trova alla fine di questo capitolo.□

Useremo solo questo, assieme alle regole del corretto argomentare, per <u>tutta l'analisi che faremo</u>. In tal modo, le proprietà scelte avranno ovviamente un'importanza cruciale.

Conformemente a quanto abbiamo appena detto, noi ricaveremo tutte le proprietà dei numeri reali a partire da questa tabella. Prima di intraprendere questa fatica, voglio far notare la presenza dell'assioma n. 10. Tale assioma è una novità, rispetto alla discussione fatta prima a proposito di $\mathbb{Q}$: ne abbiamo però bisogno per escludere che $\mathbb{R}$ possa essere costituito da un solo elemento.

I primi 15 assiomi di $\mathbb{R}$ sono le proprietà che ho messo in evidenza nel paragrafo precedente, relativamente alle operazioni e alla relazione d'ordine in $\mathbb{Q}$. Quindi $\mathbb{Q}$ soddisfa tutti gli assiomi, tranne che per l'ultimo. E' proprio tale assioma la differenza chiave tra $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$. Soffermiamoci dunque su tale proprietà. La prima cosa da osservare è che essa davvero non vale in $\mathbb{Q}$. Per provare questo, basta esibire una coppia di classi separate che non hanno elemento separatore. Per farci venire un'idea su come si possa fare, possiamo sfruttare il fatto che, bene o male, una idea di chi siano i numeri reali ce l'abbiamo. Per esempio, è piuttosto diffusa la conoscenza del fatto che $\sqrt{2}$ non è un numero razionale (cioè: non esiste alcun numero razionale il cui quadrato sia uguale a 2). Mettiamoci allora per un momento a lavorare, ovviamente informalmente, nei numeri reali. Potremmo costruirci una coppia di classi separate in questo modo:

A $\sqrt{2}$ B
—//////////)(/////////— .

Se il disegno non è chiaro, l'idea comunque è di prendere tutti i numeri, tranne $\sqrt{2}$. Più precisamente, mettiamo in A tutti i numeri più piccoli di $\sqrt{2}$ e in B tutti quelli più grandi. Allora l'elemento separatore dovrebbe essere proprio $\sqrt{2}$ (e solo lui). Se quindi ci mettiamo a lavorare in $\mathbb{Q}$, cioè se in A mettiamo tutti i razionali minori di $\sqrt{2}$ e in B i razionali maggiori di $\sqrt{2}$, tra A e B dovrebbe esserci un "buco", poiché l'unico candidato ad essere l'elemento separatore dovrebbe essere $\sqrt{2}$ che però non va bene perché non sta in $\mathbb{Q}$.

Questa sopra delineata, convincente o no che sia, è l'idea che effettivamente funziona. Si può infatti dimostrare che $A = \{ x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2 \}$ e $B = \{ x \in \mathbb{Q} : x > 0$ e $x^2 > 2 \}$ sono classi separate in $\mathbb{Q}$, senza però elemento separatore in $\mathbb{Q}$. Non vedremo i dettagli di questa dimostrazione. Ma l'idea è semplice. Supponiamo che sia $z \in \mathbb{Q}$ elemento di separazione: si considera z^2 e si fa vedere che non può essere ne' $z^2 > 2$, ne' $z^2 < 2$. Visto che non può neanche essere $z^2 = 2$, dato che in $\mathbb{Q}$ non c'è alcun numero il cui quadrato faccia 2 , ne deduciamo che non ci sono elementi di separazione.

Non ci si può però fermare alla sola constatazione che la proprietà di completezza vale in $\mathbb{R}$ ma non in $\mathbb{Q}$. Perché questo non rende minimamente l'idea del <u>perché</u> ci interessi così tanto quella proprietà. Non è facile da dirsi. Si vedrà a posteriori la portata di questa proprietà. Per ora mi limito a dire che essa appare come conclusione (almeno, per ora) di tutto il processo di sistemazione dei fondamenti dell'analisi, una fatica che è durata secoli. Tale fatica ha trovato il suo compimento nel secolo scorso, portando però anche nel contempo alla cosiddetta "crisi dei fondamenti" della matematica. Penso che queste brevi annotazioni servano almeno a dare l'idea di quanto peso abbia avuto tale proprietà nello sviluppo della matematica, e di come non si tratti di una questione liquidabile in poche parole.

3. Conseguenze elementari degli assiomi

Non vedremo certo tutte le conseguenze: quel che più mi interessa mettere in evidenza è, per così dire, l'idea guida, e cioè che se volessimo potremmo davvero ricavarle tutte. Meglio però cominciare subito, di modo che si capisca dove voglio andare a parare, e rinviare alla fine del paragrafo i commenti.

Una proprietà interessante che si ottiene è l'unicità dell'elemento neutro. Siamo oltretutto moralmente obbligati a provarlo, in quanto abbiamo utilizzato questo fatto nell'elenco stesso degli assiomi. Vediamo subito "come si fa", notando che useremo solo gli assiomi n. 1, 2 e 3.

Siano a, a' due elementi neutri. Per definizione di elemento neutro, ciò significa che:

$$\begin{cases} a+x = x & \text{per ogni } x \in \mathbb{R} \\ a'+y = y & \text{per ogni } y \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Allora, in particolare (scegliendo a' come x ed a come y): $a+a' = a'$ e $a'+a=a$. La proprietà commutativa ci dice che $a+a' = a'+a$, da cui si ha che $a' = a$. Pertanto l'elemento neutro per l'addizione è unico.

Si dimostra facilmente anche che l'opposto di un numero reale è unico. Siano y,z due opposti di x , cioè t.c. $x+y=0$ e $x+z=0$. Allora:

$z =$	aggiungendo a z lo 0 , elemento neutro per il $+$
$= z+0 =$	per la proprietà commutativa del $+$
$= 0+z =$	aggiungendo z a entrambi i membri della prima relazione
$= (x+y)+z =$	per la proprietà commutativa del $+$
$= (y+x)+z =$	per la proprietà associativa del $+$
$= y+(x+z) =$	perché z è opposto di x
$= y+0 =$	per definizione di elemento neutro
$= y$.	

Abbiamo ottenuto che $y=z$. Quindi l'opposto di un numero reale è unico.

Da qui segue anche che $-(-x)=x$. Infatti, essendo $-x$ l'opposto di x , per definizione si ha $x+(-x)=0$. Ma la proprietà commutativa ci dà $(-x)+x = 0$. E quindi x è opposto di $-x$. Per l'unicità dell'opposto di un numero, possiamo concludere che $x=-(-x)$.

Trucchi similari permettono di provare l'unicità dell'elemento neutro per la moltiplicazione.

Un'altra proprietà interessante da notare e da provare è che $a \cdot 0=0$, qualunque sia $a \in \mathbb{R}$. Come si dimostra? Notiamo, per cominciare, che:

$$a \cdot 0 = a \cdot (0+0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$$

($0 = 0+0$ perché 0 è l'elemento neutro per l'addizione; la seconda uguaglianza è conseguenza della proprietà distributiva).

Aggiungendo ad entrambi i membri $-(a \cdot 0)$, cioé l'opposto di $a \cdot 0$, si ha:

$0 =$	per definizione di opposto
$= a \cdot 0 + (-(a \cdot 0)) =$	per quanto visto sopra
$= (a \cdot 0 + a \cdot 0) + (-(a \cdot 0)) =$	per la proprietà associativa del $+$
$= a \cdot 0 + (a \cdot 0 + (-(a \cdot 0))) =$	per definizione di opposto
$= a \cdot 0$.	

Sembrano giochi di prestigio. In realtà, per capire davvero quello che si sta facendo, non bisogna scordarsi quale è l'obbiettivo: con i mattoni a nostra disposizione (gli assiomi) stiamo costruendo dei pezzi di casa che poi useremo così già belli fatti per proseguire nella costruzione. E' chiaro che all'inizio il lavoro e' noioso e richiede molta attenzione (sennò poi tutto verrà storto). Una fonte di disagio può essere che uno non capisce perché si fa tutto questo: sembra che stiamo dimostrando cose ovvie. E' vero se si pensa a tutto quanto uno ha già imparato di matematica: ma il punto di vista qui è che vogliamo far vedere che possiamo "rifare tutto" a partire solo dagli assiomi 1÷16. Quindi non possiamo dare per scontato nulla. Un'altra fonte di disagio può essere che uno non capisce come possano venire in mente certi trucchi. Detto altrimenti, se uno avesse dovuto dimostrare da solo che $a \cdot 0 = 0$, magari costui non avrebbe saputo da che parte voltarsi. Credo che sia sensata questa sensazione di disagio: ad un muratore apprendista può sembrare un'impresa immane riuscire a tirar su un muretto di mattoni in costa. La situazione di chi legge queste righe può essere simile: con l'esperienza, queste difficoltà iniziali appariranno inspiegabili. Si può comunque dare qualche idea per far capire che non bisogna essere marziani per affrontare questi problemi. Tanto per cominciare, la proprietà in questione, e cioé $a \cdot 0 = 0$, coinvolge le due operazioni (l'addizione è coinvolta per la presenza di 0 che è l'elemento neutro per l'addizione). Era quindi praticamente scontato che si dovesse usare la proprietà distributiva, in quanto proprietà chiave che "lega" le due operazioni. Essendo poi coinvolto 0 e non avendo per giunta molto di più su cui lavorare, era plausibile che bisognasse sfruttare la sua caratteristica, cioè quella di essere elemento neutro per l'addizione: queste sono esattamente le idee che sono servite per ottenere il risultato preliminare che $a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0$.

La proprietà che $a \cdot 0 = 0$ ha varie conseguenze interessanti. La più importante è che preclude la possibilità di trovare il reciproco di 0 per la moltiplicazione. Infatti, l'esistenza del reciproco di 0 , cioè di un numero $x \in \mathbb{R}$ t.c. $0 \cdot x = 1$, è in contraddizione con quanto appena trovato, che ci garantisce che $0 \cdot x = 0$ (ricordare che $0 \neq 1$ per l'assioma 10!).

Si noti che, "fortunatamente", nell'assioma 8 abbiamo posto la condizione $x \neq 0$: se avessimo voluto "pretendere di più", cioè garantire l'esistenza del reciproco di <u>ogni</u> numero reale, avremmo ottenuto il risultato di trovarci con un sistema assiomatico contraddittorio e quindi del tutto inutile.

Già che parliamo dell'assioma 8, voglio far notare che in esso <u>non</u> c'è scritto esplicitamente che 0 non ha reciproco! E' detto che i numeri diversi da zero hanno reciproco, il che è ben altra cosa. Che 0 non abbia reciproco l'abbiamo appena finito di dimostrare ora.

Un'altra conseguenza di $a \cdot 0 = 0$ sono le "regole dei segni". Cioè che $+ \cdot + = +$, $+ \cdot - = -$, etc. La validità di queste regole è molto spesso accettata più per ragioni di sopravvivenza scolastica che per intima convinzione: non è mia intenzione dare qui delle motivazioni applicative a supporto di queste regole (la più difficile da accettare è che $- \cdot - = +$), ma almeno far vedere che esse sono conseguenza degli assiomi sì.

Prima però di vedere questo, ho bisogno di un momento di riflessione, e cioè: che cosa significa dire che "più per meno uguale meno"? Ci sono due interpretazioni possibili. Una è che se moltiplico un numero positivo[1] per un numero negativo, ho come risultato un numero negativo. Ed è forse questa la interpretazione usuale. Ma ce n'è un'altra. E cioè che se moltiplico x per l'opposto di y , cioè faccio $x \cdot (-y)$, quello che ottengo è l'opposto di $x \cdot y$. Insomma, in formule: $x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$.

Ebbene, le regole dei segni possono essere dimostrate a partire dagli assiomi in entrambe le loro accezioni. Io dimostrerò quest'ultima versione.

Cominciamo a vedere che per ogni numero reale z si ha $-z = (-1) \cdot z$. Infatti: $z + ((-1) \cdot z) = 1 \cdot z + ((-1) \cdot z) = (1 + (-1)) \cdot z = 0 \cdot z = 0$. Quindi $(-1) \cdot z$ è

[1] Cioè maggiore di zero. Vale a dire che, se x è questo numero, si ha $0 \leq x$ e $x \neq 0$. Non è pedanteria, questa: ho detto che avremmo ricavato tutto dagli assiomi, quindi <u>devo stare attento a non introdurre una terminologia che non sia definibile a partire dagli assiomi</u>.

l'opposto di z (ricordiamo che l'opposto è unico!), come si era affermato. A questo punto:

$x\cdot(-y) =$	per quel che abbiamo appena dimostrato
$= x\cdot((-1)\cdot y) =$	per la proprietà associativa della moltiplicazione
$= (x\cdot(-1))\cdot y =$	per la proprietà commutativa della moltiplicazione
$= ((-1)\cdot x)\cdot y =$	per la proprietà associativa della moltiplicazione
$= (-1)\cdot(x\cdot y) =$	per quel che abbiamo appena dimostrato
$= -(x\cdot y)$	

Un'altra conseguenza importante degli assiomi, ed un legame importante tra operazioni e relazione d'ordine, è la possibilità di definire il valore assoluto di un numero, con le sue proprietà (in particolare, la cosiddetta disuguaglianza triangolare).

Dato $x \in \mathbb{R}$, definiamo $|x|$ nel modo seguente:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \\ -x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

La prima osservazione da fare è che si ha $0 \leq |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Questo è ovvio se $0 \leq x$ (perché allora $|x| = x$). Se invece $x \leq 0$, aggiungendo membro a membro $-x$, otteniamo per l'assioma 15 che $x+(-x) \leq 0+(-x)$ e quindi $0 \leq -x = |x|$.

Un'altra proprietà utile, per quanto riguarda il valore assoluto è l'equivalenza tra le relazioni $|x| \leq a$ e $-a \leq x \leq a$, dove a è un numero reale dato soddisfacente la condizione $0 \leq a$. Suggerisco di provare a dimostrare questa osservazione.

Come detto, la proprietà importante è la disuguaglianza triangolare: per ogni x ed y numeri reali si ha: $|x+y| \leq |x|+|y|$. Ma si ha anche $|x\cdot y| = |x|\cdot|y|$. Vedremo come si fa a dimostrare la disuguaglianza triangolare. Il modo in cui è definito il valore assoluto suggerisce una strada per la dimostrazione: distinguere i casi da analizzare a seconda che x o y siano minori o uguali di zero o viceversa. I casi possibili sono dunque quattro:

PRIMO CASO: $0 \leq x$ e $0 \leq y$. Dall'assioma 15 si ha che $0+y \leq x+y$, ma $0+y = y$ perché 0 è l'elemento neutro per l'addizione: quindi abbiamo $y \leq x+y$. Da $0 \leq y$ e $y \leq x+y$ otteniamo, per la proprietà transitiva (assioma 13) $0 \leq$ $\leq x+y$. Ma allora $|x+y| = x+y$, per definizione di valore assoluto. Sempre per definizione di valore assoluto, $|x| = x$ e $|y| = y$. Quindi in questo caso

$|x+y| = x+y = |x|+|y|$. Cioè $|x+y| = |x|+|y|$ e quindi per la proprietà riflessiva (assioma 11) si ottiene $|x+y| \le |x|+|y|$.

SECONDO CASO: $0 \le x$ e $y \le 0$. Consideriamo $x+y$. Per l'assioma 14 sono possibili due casi: o $x+y \le 0$ o $0 \le x+y$. Esaminiamo il primo sottocaso. Il lettore dovrebbe controllare la validità di tutti i passaggi, sulla base degli assiomi o di quel che abbiamo dimostrato prima. E' $y+x \le 0+x = x \le x+|y| = |x|+|y|$. E inoltre $-(|x|+|y|) = (-1)\cdot(|x|+|y|) = (-1)|x|+(-1)|y| = -|x|+(-|y|) = -|x|+(-(-y)) = -|x|+y \le y \le y+x$. Avendo ottenuto $y+x \le |x|+|y|$ e $-(|x|+|y|) \le y+x$, per quanto notato a suo tempo possiamo affermare che $|x+y| \le |x|+|y|$.

La dimostrazione dell'altro sottocaso e dei due casi rimanenti è lasciata al lettore (che naturalmente può anche consultare il C-S o altri manuali).

Esercizio 1 Giustificare tutti i passaggi fatti nella dimostrazione del secondo caso.□

Come promesso all'inizio di questo paragrafo, ecco i commenti.

Immagino che le conseguenze degli assiomi che ho dimostrato in questo paragrafo non abbiano riservato nessuna sorpresa sensazionale. Erano cose presumibilmente già note al lettore. Ma è proprio da questo fatto che di solito sorge il maggior imbarazzo negli studenti, i quali si chiedono smarriti se (in particolare all'esame) gli sarà chiesto anche di dimostrare che $2+2 = 4$. Per fortuna la risposta è no[2] . La risposta può essere no perché le proprietà elementari dei numeri reali ottenibili dagli assiomi sono sostanzialmente quelle già conosciute: se uno va a vedere la lista delle R.1÷R.20 sul C-S, vedrà che esse esprimono proprietà ben note.

"Ma allora?" dirà, giustamente, il lettore impaziente. Per rispondere, mi limito a ribadire quanto ho affermato all'inizio del paragrafo: lo scopo è far vedere come si fa. Per rendere comprensibile come tutte quelle regolette relative all'algebra, alle equazioni e alle disequazioni che lo studente medio ha in testa (al di fuori, però, di una chiara trama), si possano ottenere a partire da quei soli 16 assiomi di $\mathbb{R}$. Quindi lo scopo principale è di offrire uno schema unitario per la comprensione di ciò che si è fatto nelle scuole precedenti in "algebra". Non intendo tuttavia tacere un'altra ragione per questo paragrafo: e

[2] Anche se nel paragrafo 6 faremo ben di peggio. Addirittura cercheremo di capire cosa voglia dire che $1+1 = 2$!!

cioè quella di abituare lo studente a un modo rigoroso di ragionare. Chi fosse recalcitrante, deve rassegnarsi: lo "standard" di rigore richiesto è sensibilmente più alto[3] di quello richiesto nelle scuole secondarie. E allora questo paragrafo, essendo fondato su una breve lista di assiomi, ben si presta come "allenamento" per la "ginnastica" mentale che è l'analisi matematica[4].

[3] Non è il massimo livello di rigore possibile (non esiste, un massimo livello).

[4] A costo di essere noioso con queste note a pié pagina, ci tengo a dire che l'analisi matematica non è solo una ginnastica mentale. Vederla così sarebbe sciocco, anche se è fra i principali aspetti "formativi" dell'analisi vista come disciplina di insegnamento.

4. Relazione d'ordine e intervalli

Mentre il paragrafo precedente è stato dedicato in prevalenza alle operazioni in $\mathbb{R}$, in questo paragrafo concentreremo l'attenzione sulla relazione d'ordine.

Abbiamo a disposizione $\leq$, relazione d'ordine totale e completa su $\mathbb{R}$. Vogliamo vedere come si possano definire semplicemente a partire da questa le relazioni $<$, $\geq$, $>$. Casomai uno non se ne fosse accorto, faccio notare che nel precedente paragrafo sono stato attento ad usare sempre e solo $\leq$ (neanche $\geq$), in quanto gli assiomi di $\mathbb{R}$ fanno riferimento esclusivamente a tale relazione.

Definizione 1 Dati $x,y \in \mathbb{R}$, diciamo che:

$x<y$ se $x \leq y$ e $x \neq y$

$x \geq y$ se $y \leq x$

$x>y$ se $y<x$.□

Queste relazioni "nuove" godono delle proprietà consuete. Tanto per fare un esempio, la relazione $<$ è transitiva. Siano infatti $x,y,z \in \mathbb{R}$ t.c. $x<y$ e $y<z$. Allora, per la definizione 1, abbiamo $x \leq y$ e $y \leq z$, da cui per la transitività di $\leq$ (assioma 13), si ha che $x \leq z$. Resta da provare che $x \neq z$, per poter dire che $x<z$. Se per assurdo fosse $x=z$, allora sarebbe anche $z \leq x$ (il $\leq$ è riflessivo, assioma 11) e quindi $z \leq y$ (perchè? perchè $\leq$ è transitiva e abbiamo $z \leq x$ e $x \leq y$). Ma $z \leq y$ è incompatibile con l'assunto $y<z$. In effetti, $y<z$ implica $y \leq z$, che assieme alla relazione $z \leq y$ e all'antisimmetria (assioma 12) ci dà $y=z$, il che però è incompatibile con $y<z$.

Un'altra proprietà che dimostriamo in quanto ci servirà nel prossimo paragrafo, è la seguente.

Proposizione 1 Dati $x,y,z \in \mathbb{R}$, se $x<y$ allora $x+z < y+z$.□

Dimostrazione Poiché $x<y$, allora $x \leq y$ e quindi per l'assioma 15 si ha $x+z \leq y+z$. Dobbiamo pertanto solo garantire che non può essere $x+z = y+z$. Ma se così fosse, aggiungendo ad entrambi i membri l'opposto di z , cioè $-z$, avremmo: $(x+z)+(-z) = (y+z)+(-z)$. Ovverossia: $x+(z+(-z)) = y+(z+(-z))$. Ovvero $x=y$, il che è in contrasto con la ipotesi che fosse $x<y$.□

Avendo a disposizione sia $\leq$ che $<$, possiamo introdurre una notazione utilizzata per descrivere particolari sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, detti intervalli.

Definizione 2 Dati $a,b \in \mathbb{R}$, definiamo:

$[a,b] = \{ x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b \}$

$[a,b[= \{ x \in \mathbb{R} : a \leq x < b \}$

$[a,+\infty[= \{ x \in \mathbb{R} : a \leq x \}$

$]a,+\infty[= \{ x \in \mathbb{R} : a < x \}$

$]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$.□

Esercizio 1 Definire $]a,b]$, $]a,b[$, $]-\infty,b]$, $]-\infty,b[$.□

Osservazione 1 Si noti che gli intervalli di estremi a,b sono vuoti se $b < a$. Non solo, ma se $a = b$, abbiamo $[a,b] = \{a\}$ e $[a,b[=]a,b] =]a,b[= \emptyset$. Quindi anche $\emptyset$ e $\{a\}$ sono intervalli . Questi si dicono però intervalli degeneri. Pertanto, d'ora in poi quando farò riferimento agli intervalli assumerò sempre implicitamente che sia $a < b$, salvo esplicito avviso contrario.□

5. Estremo superiore

In questo paragrafo, dall'assioma di completezza dedurremo una proprietà molto importante, relativa al cosiddetto estremo superiore, che useremo molto spesso nel seguito. Prima però abbiamo bisogno di un po' di definizioni.

Definizione 1 Siano dati $A \subseteq \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{R}$. Diremo che k è un maggiorante per A se $a \leq k$ per ogni $a \in A$.□

Notare che a k non si richiede di appartenere ad A . Se $k \in A$, allora diciamo che k è massimo per A e lo indichiamo con $\max A$. Se si ha $k \leq a$ per ogni $a \in A$, allora diremo che k è un minorante (e se $k \in A$ sarà detto minimo e lo indicheremo con $\min A$).

Definizione 2 $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice superiormente limitato se esiste $k \in \mathbb{R}$ t.c. k è un maggiorante per A .□

Analoga è la definizione di inferiormente limitato. Se infine esistono $h,k \in \mathbb{R}$, rispettivamente minorante e maggiorante per A , allora si dice che A è limitato.

Fatte queste premesse, osserviamo che non è garantito che un insieme superiormente limitato abbia massimo.

Esempio 1 $[0,1[$ non ha massimo. Infatti 1 è un maggiorante, ma $1 \notin [0,1[$. Neanche $k > 1$ è un massimo per $[0,1[$ (perchè $k \notin [0,1[$). Se prendiamo $k \in [0,1[$, abbiamo $(1+k)/2 \in [0,1[$ e $k < (1+k)/2$, pertanto k non è un maggiorante. Infine, se $k < 0$, di nuovo k non può essere massimo perchè $k \notin [0,1[$.□

Per molte applicazioni è importante però avere a disposizione un "surrogato" del massimo. L'idea è semplice. Nell'esempio, 1 non è massimo, però è il più piccolo di tutti i maggioranti. Possiamo allora sperare che possa svolgere certe funzioni di solito assegnate al massimo, pur senza esserlo. Per questa ragione, introduciamo la seguente definizione.

Definizione 3 Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. E sia $M_A = \{ k \in \mathbb{R} : k$ è maggiorante per $A \}$. Se esiste $\min M_A$, diciamo che tale minimo è l'estremo superiore di A e lo indichiamo con $\sup A$.□

L'interesse della definizione 3 sta nel fatto (che dimostreremo) che ogni insieme superiormente limitato di $\mathbb{R}$ ha estremo superiore, con una sola eccezione. L'eccezione è l'insieme vuoto, $\emptyset$: poiché $\emptyset$ non ha elementi, ogni elemento di $\mathbb{R}$ è un suo maggiorante[5]. Abbiamo così che $M_\emptyset = \mathbb{R}$, ed $\mathbb{R}$ non ha minimo.

Esercizio 1 Dimostrare che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, $x-1 < x$ (provare dapprima che $1 > 0$, e notare che $x-1$ è una scrittura abbreviata per $x+(-1)$). Dedurre da ciò che $\mathbb{R}$ non ha minimo.□

Proviamo quindi il risultato sopra indicato.

Teorema 1 (esistenza dell'estremo superiore) Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ e superiormente limitato. Allora esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ t.c. $\lambda = \sup A$.□

Dimostrazione Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ e superiormente limitato. Consideriamo $M_A = \{ m \in \mathbb{R} : a \leq m$ per ogni $a \in A \}$, cioè l'insieme dei maggioranti di A . Si verifica facilmente che $\{ A, M_A \}$ è una coppia di classi separate. Pertanto esiste $z \in \mathbb{R}$ t.c. per ogni $a \in A$ e $b \in B$, si ha $a \leq z \leq b$. Essendo $a \leq z$ per ogni $a \in A$, si ha che z è un maggiorante. Quindi $z \in M_A$. Poiché $z \leq b$ per ogni $b \in M_A$, abbiamo che z è proprio il minimo dei maggioranti, cioè $z = \sup A$.□

E' difficile sopravvalutare l'importanza di questo teorema, tanto è vero che abbiamo riportato nella tabella la proprietà espressa dal precedente teorema : in effetti addirittura potremmo sostituire l'assioma 16 con la proprietà 17 (vedi tabella). Cioè: il fatto che un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ non vuoto e superiormente limitato abbia estremo superiore, è addirittura una formulazione della proprietà di completezza equivalente a quella che abbiamo scelto noi, basata sulle classi separate. Proveremo ora questo fatto. Cioè che se agli assiomi 1÷15 aggiungiamo come ulteriore assioma la proprietà 17, otteniamo la proprietà 16 come teorema.

Ed eccone la formalizzazione e la dimostrazione.

Teorema 2 Le proprietà 1÷15 e 17 implicano la proprietà 16.□

Dimostrazione Sia quindi (A,B) una coppia di classi separate. Allora $A \neq \emptyset$ per definizione di coppia di classi separate; poiché $B \neq \emptyset$ per la stessa ragione, abbiamo che esiste $b \in B$ e quindi che A ha almeno un maggiorante, cioè è superiormente limitato. In altre parole, il fatto che (A,B) sia una coppia di classi separate garantisce che $A \neq \emptyset$ e che A e' superiormente limitato. Quindi

[5] Invito chi non ci crede, o ha dei dubbi, a pazientare ed attendere la lettura del § II.3.

esiste $z = \sup A$. Proviamo che per ogni $a \in A$, per ogni $b \in B$, $a \leq z \leq b$. Che sia $a \leq z \quad \forall\, a \in A$ è ovvio in quanto il sup è un maggiorante. Per l'altra disuguaglianza, notiamo che gli elementi di B sono tutti dei maggioranti per A (conseguenza della definizione di coppia di classi separate) e pertanto $z \leq b$ per ogni $b \in B$ perché z , essendo il sup di A , è il più piccolo dei maggioranti di A .□

Osservazione 1 Se A non è superiormente limitato, ovviamente non può esservi il minimo dei maggioranti, in quanto di maggioranti non ce ne sono. In tal caso, se $A \neq \emptyset$, si usa dire che $\sup A = +\infty$. Se $A = \emptyset$, si usa dire che $\sup A = -\infty$.□

Deve essere ben chiaro che la scrittura $\sup A = +\infty$ è solo un modo per dire sbrigativamente che A non è superiormente limitato ed è non vuoto: non si intende dire che $+\infty$ è un numero reale! Ribadito che $+\infty$ e $-\infty$ non sono numeri reali, va anche detto che queste convenzioni non sono "a caso": volendo, si potrebbe "estendere" l'insieme $\mathbb{R}$ con due nuovi elementi ($-\infty$ e $+\infty$ appunto). A tale insieme si può estendere anche la relazione d'ordine $\leq$, senza alcuna difficoltà. Qualche difficoltà presenta invece l'estensione delle due operazioni a questo insieme: esse non godono più delle buone proprietà che hanno in $\mathbb{R}$. Io non userò questa estensione di $\mathbb{R}$. Chi fosse interessato può consultare C-S a pag. 36 (definizione 9.6) . Faccio solo notare che in questa estensione effettivamente $\sup A = +\infty$, quando A è non vuoto e superiormente illimitato: da qui la ragione per l'uso di questa notazione.

Osservazione 2 Naturalmente quel che è stato appena detto è una sciocchezza colossale, messa lì come esca per attirare i formalisti più sfrenati. Io la penso ben diversamente, come cercherò di spiegare qui appresso.

Vi sono molte situazioni in cui è interessante l'idea di "enormemente grande", o di "allontanarsi indefinitamente", o di "crescere senza limiti", e simili. Ad esempio, se abbiamo due cariche elettriche dello stesso segno, la loro "tendenza spontanea" è quella di allontanarsi sempre di più. E' allora utile avere a disposizione, in vari contesti, una formalizzazione matematica di queste idee, le quali presentano, si badi bene, delle diverse sfumature di significato. Dato che le idee in gioco hanno comunque qualcosa in comune, non è strano che si usi lo stesso simbolo per denotare il concetto matematico che le traduce a livello formale. Ecco quindi perché lo stesso simbolo "∞" è usato in casi distinti:

- nei limiti
- per indicare il "sup" di un insieme che non ha estremo superiore in $\mathbb{R}$, non essendo superiormente limitato.

La raffinatezza maggiore (per i formalisti incalliti) è poi quella di riuscire a escogitare un modo per avere a disposizione un numero "enormemente grande": ovviamente il simbolo che verrà usato per indicare tale "numero" sarà ∞ .

Ed ecco allora spuntare fuori il sistema dei "numeri reali estesi", dentro al quale $+\infty$ e $-\infty$ hanno lo stesso diritto di cittadinanza che 257 . All'interno di questo sistema dei numeri reali estesi, è vero che ogni sottoinsieme ha estremo superiore, senza eccezione alcuna: quindi ad esempio il sup dei numeri positivi è $+\infty$. Ma da qui a dire che questa è la "vera ragione" per cui uno dice che $\sup A = +\infty$ quando A non è superiormente limitato (e non vuoto), ce ne corre!□

Concluderò questo paragrafo parlando brevemente di "classi contigue". Lo faccio perché esse saranno utili nel seguito (nel capitolo V), ma anche per offrire a chi già avesse sentito parlare di classi contigue un'occasione di rilettura ed anche di inquadramento rispetto all'approccio che ho seguito. Ma soprattutto lo faccio perché mi offre un'occasione magnifica per introdurre il paragrafo successivo.

<u>Definizione 4</u> Una coppia (A,B) si dice coppia di classi contigue se è una coppia di classi separate ed inoltre gode della seguente proprietà:

per ogni numero reale $\varepsilon > 0$, esistono due numeri $a \in A$ e $b \in B$ t.c. $b-a < \varepsilon$.□

L'idea è ovvia: le due classi sono "appiccicate", ovverossia non c'è spazio vuoto tra di loro. Se questa è l'idea, dovrebbe essere ovvio anche il seguente teorema (almeno nella prima parte in cui afferma che vi è un unico elemento separatore).

<u>Teorema 3</u> Sia (A,B) una coppia di classi contigue. Allora esiste uno ed un solo $z \in \mathbb{R}$, elemento separatore per le due classi; inoltre $z = \sup A$ e $z = \inf B$.□

<u>Dimostrazione</u> Che un elemento separatore ci sia, è garantito dall'assioma 16, essendo (A,B) una coppia di classi separate. Supponiamo allora per assurdo che

non sia unico, e siano quindi $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ con $z_1 \neq z_2$ entrambi elementi separatori. Supponiamo $z_1 < z_2$ (altrimenti scambiamo gli indici). Basta prendere $\varepsilon = \frac{z_2-z_1}{1+1}$ per avere una contraddizione. Infatti, per definizione di coppia di classi contigue, dovrebbero esistere $a \in A$ e $b \in B$ t.c. $b-a < \varepsilon$. Ma $a \leq z_1 < z_2 \leq b$. E quindi $z_2-z_1 \leq b-a < \varepsilon = \frac{z_2-z_1}{1+1}$, il che è impossibile.

Quindi l'elemento separatore è unico. Ma allora deve essere per forza $z = \sup A$ (indicando, come di consueto, con z l'elemento separatore), poiché abbiamo già visto nella dimostrazione del teorema 2 che $\sup A$ è <u>un</u> elemento separatore: essendovi un solo elemento separatore, esso non può essere altri che $\sup A$. Per l'affermazione che $z = \inf B$, la dimostrazione del teorema 2, opportunamente adattata, garantisce che $\inf B$ è un elemento separatore: al resto ci pensa l'unicità.□

<u>Esercizio 1</u> Provare che $a \leq z_1 < z_2 \leq b$ implica che $z_2-z_1 \leq b-a$.□

<u>Esercizio 2</u> Provare che, se $\alpha \geq 0$, allora $\frac{\alpha}{1+1} \leq \alpha$. Dedurre che $z_2-z_1 < \frac{z_2-z_1}{1+1}$ è impossibile quando $z_1 < z_2$. Se non ce la fate, leggete l'osservazione seguente.□

<u>Osservazione 3</u> Spero proprio che ogni lettore si sia chiesto perché ho usato $1+1$ anziché 2 . La ragione è ovvia, per chi abbia dimestichezza col metodo assiomatico. Infatti, non c'è scritto da nessuna parte che cosa voglia dire 2 . Risolveremo questo problema nel prossimo paragrafo.□

<u>Osservazione 4</u> Chissà se qualcuno si è accorto che ho usato 2 nella dimostrazione del teorema 3! E allora, perché mi sono permesso di usare il simbolo 2 come indice ma non l'ho usato al posto di $1+1$? Anche questo problema, un po' più "sottile" del precedente, lo risolveremo nel prossimo paragrafo.□

<u>Esercizio 3</u> In questo capitolo ho già usato 2 in modo illegale. Dove?□

6. I naturali, interi e razionali come sottoinsiemi di $\mathbb{R}$

L'approccio assiomatico ad $\mathbb{R}$ che ho adottato ha alcuni pregi, ma anche difetti. Non mi riferisco solo al fatto che è un approccio astratto e difficile da assimilare, all'inizio. Ci sono anche delle difficoltà intrinseche di questo approccio. Una è che molte cose sono da ricostruire di sana pianta. Ad esempio, proprietà ben note e largamente sfruttate già nelle scuole precedenti, come il fatto che $x^2 \geq 0$ per ogni numero reale x. Noi abbiamo visto la dimostrazione solo di un campione estremamente ristretto di tali regole, nello spirito di: "vedete, si fa così e cosà: se volessimo, potremmo perdere il nostro tempo a provare tutto, ma non ne vale la pena".

In questo paragrafo affrontiamo (anche se lo spirito rimane sempre quello) un problema importante, che può essere esemplificato dalla domanda: "chi è 2 ?". Tutti sanno che 2 è il simbolo usato per indicare un particolare numero naturale, nel consueto sistema di numerazione decimale (ed usando le cosiddette cifre arabiche, anche se gli arabi usano un simbolo diverso...). Ma 2 è un elemento di $\mathbb{R}$? L'idea è che la risposta dovrebbe essere sì: dopotutto, con i numeri reali si cerca di allargare il più possibile il campo dei numeri. Ma dove sta scritto negli assiomi che 2 sta in $\mathbb{R}$? O, almeno, come si fa a ricavarlo? Generalizzando, abbiamo il seguente problema: possiamo "ricostruire" dentro ad $\mathbb{R}$ dei sottoinsiemi che si comportano in tutto e per tutto come i naturali, o gli interi, o i razionali?

Come facciamo, tanto per cominciare, ad identificare i naturali? La chiave di tutto sta proprio nella risposta alla domanda da cui siamo partiti: chi è 2 ? Esso è il successore di 1, si potrebbe dire: ma questo ci aiuta poco, in $\mathbb{R}$. Più utile è osservare che $2 = 1+1$, visto che abbiamo a disposizione 1 (attenzione: quello che conta è che c'è un numero reale che si comporta sotto molti aspetti come il numero naturale 1, non certo il fatto che sia stato usato lo stesso simbolo per indicarlo! Se avessi usato $\therefore$ per indicare l'elemento neutro per la moltiplicazione, definirei 2 come $\therefore + \therefore$). Vedremo che questo approccio funziona, ma occorre un po' di cautela. Chi ci garantisce che 2 sia un numero reale "nuovo", cioè diverso da quelli che conosciamo, vale a dire 0 e 1 ?

<u>Proposizione 1</u> $1+1 \neq 0$ e $1+1 \neq 1$.□

<u>Dimostrazione</u> Osserviamo che $0 < 1$. Infatti, dati 0 e 1 , essendo diversi

per l'assioma 10 ed essendo l'ordine totale, deve essere vero o che $0<1$ o che $1<0$. Se supponiamo $1<0$, abbiamo (per la Proposizione 1, § 4) $1+(-1)<$ $<0+(-1)$, cioè $0<-1$. Moltiplicando $1<0$ membro a membro per -1 otteniamo (per l'assioma 15) che $1\cdot(-1)<0\cdot(-1)$. Cioè $-1<0$. Da cui $(-1)+1<$ $<0+1$, cioè $0<1$, contraddizione. Pertanto non può essere altro che $0<1$. Ma allora $0+1<1+1$ (per la proposizione 1. § 4), cioè $1<1+1$ e quindi in particolare $1\neq 1+1$.

Poiché $0<1$ e $1<1+1$, per la proprietà transitiva abbiamo $0<1+1$ e quindi $0\neq 1+1$.□

Abbiamo quindi provato che $\mathbb{R}$ contiene almeno tre elementi. Indicheremo con 2 il numero $1+1$. Naturalmente si può proseguire e mostrare che $2+1$ (indicato, guarda caso, con 3) è diverso da ognuno dei numeri $0,1,$ e 2 , e così via. Si può dimostrate che il sottoinsieme costituito da $1,2,3,\ldots$ "si comporta come i numeri naturali" e lo denoteremo pertanto con $\mathbb{N}$. Poi, se consideriamo il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ costituito dagli elementi di $\mathbb{N}$, da tutti i loro opposti e da 0 , abbiamo che esso si comporta come gli interi e lo indicheremo con $\mathbb{Z}$. Ancora, l'insieme di tutti i numeri del tipo p/q con $p\in\mathbb{Z}$ e $q\in\mathbb{N}$, può essere identificato con l'insieme dei numeri razionali, e cioè $\mathbb{Q}$. Abbiamo così ricostruito dentro $\mathbb{R}$, come sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, gli insiemi numerici $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$. Spero sia ovvio che ho omesso un numero enorme di dimostrazioni.

Vorrei essere molto chiaro su un punto. E cioè: questo capitolo è dedicato ai numeri reali, basandosi sul presupposto che i numeri naturali, interi e razionali siano noti con le loro proprietà. Per esempio, nel primo paragrafo, non ho fatto altro che richiamare proprietà dei numeri razionali note al lettore[6]: <u>non</u> avevo lo scopo di dimostrarle o di "stabilirle" in alcun modo, ma volevo solo, per l'appunto, richiamarle. Analogamente, proprietà riguardanti i numeri interi come quella che fa riferimento alla distinzione tra pari e dispari o alla scomposizione in fattori primi, l'idea stessa di numero primo, sono state date per scontate.

Quindi l'obbiettivo di questo paragrafo non poteva essere quello di "inventare" $\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q}$ a partire da $\mathbb{R}$. Ma solo quello di <u>scoprire</u> dentro $\mathbb{R}$ dei sottoinsiemi che possono essere agevolmente identificati con gli insiemi numerici $\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q}$ che ho assunti come noti, anche per quanto riguarda le loro proprietà. Ad

[6] O che avrebbero dovuto essere tali. In effetti il § 1 aveva anche la funzione, per così dire, di rinfrescare la memoria.

esempio, quando faccio riferimento ai numeri 3 e 5 come elementi di $\mathbb{R}$, voglio che sia vero che $3<5$, esattamente come succedeva per i corrispondenti numeri naturali. Oppure che 17 sia ancora un numero primo, cioè che non si riescano a trovare dentro il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ che rappresenta i naturali due numeri (a parte 1 e 17) il cui prodotto mi dia 17. Etc, etc.

Quanto ho appena finito di dire dovrebbe rendere possibile la soluzione del quesito posto dall'osservazione 5.3. Infatti, un conto è usare il ben noto numero naturale 2 come indice per una variabile, un conto è invece fare riferimento al numero 2 <u>all'interno</u> <u>dei</u> <u>numeri</u> <u>reali</u>!

7. Alcune domande di fondo sull'approccio assiomatico seguito

Abbiamo detto che per noi $\mathbb{R}$ è un insieme su cui sono definite due operazioni e una relazione, soddisfacenti gli assiomi indicati nella tabella.

Ma c'è un tale insieme? E' unico?

La risposta ad entrambe le domande è affermativa. Per la prima, la proveremo nel paragrafo 9 costruendo esplicitamente un modello di $\mathbb{R}$, a partire dai numeri razionali. Vi sono molte strade percorribili, tutte un po' complicate: quella che ho scelto ha un vantaggio: permette di giungere facilmente ad ottenere le proprietà chiave, cioè la completezza di $\mathbb{R}$.

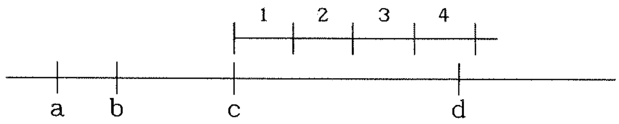
Per quanto riguarda l'unicità di $\mathbb{R}$, la situazione è la seguente: si può dimostrare che, presi due insiemi $\mathbb{R}_1$ ed $\mathbb{R}_2$, su entrambi i quali sono definite due operazioni e una relazione soddisfacenti gli assiomi 1÷16, essi risultano essere tra loro isomorfi. Isomorfi significa che c'è una corrispondenza biunivoca $\phi:\mathbb{R}_1 \longrightarrow \mathbb{R}_2$ t.c. per ogni $x,y \in \mathbb{R}_1$ si ha: $\phi(x+y) = \phi(x)+\phi(y)$, $\phi(x \cdot y) = \phi(x)\cdot\phi(y)$ e ($x \le y$ se e solo se $\phi(x) \le \phi(y)$) . Il fatto che siano isomorfi significa che sono a tutti gli effetti indistinguibili tra loro, nella misura in cui sono coinvolti gli assiomi e le loro conseguenze. Concludo dicendo che non proverò l'esistenza di questo isomorfismo, anche se non è particolarmente difficile ottenerlo.

Osservazione 1 Ho molto insistito sul fatto che i razionali godono di tutte le proprietà dei numeri reali, eccettuata la completezza. Forse c'è chi si è convinto che se io sostituissi $\mathbb{Q}$ ad $\mathbb{R}$ negli assiomi 1÷15 della tabella, io otterrei gli assiomi per i numeri razionali. Così non è. Ovviamente i razionali godono delle proprietà espresse dagli assiomi 1÷15 (con $\mathbb{Q}$ al posto di $\mathbb{R}$), come abbiamo già visto nel primo paragrafo; tuttavia questi assiomi non bastano a caratterizzare $\mathbb{Q}$ (a meno di isomorfismi), contrariamente a quel che abbiamo appena visto succedere per $\mathbb{R}$ con gli assiomi 1÷16. Esistono delle caratterizzazioni assiomatiche di $\mathbb{Q}$, ma non è mia intenzione presentarle.□

8. La proprietà archimedea

Questo paragrafo presenta una conseguenza degli assiomi di $\mathbb{R}$ particolarmente utile per i limiti. Si tratta della proprietà archimedea. Questa proprietà dovrebbe essere stata già vista nelle scuole secondarie, nel contesto della geometria euclidea (più precisamente, la geometria della retta euclidea, nel capitolo relativo alla misurazione dei segmenti). L'idea geometrica è che se abbiamo due segmenti, pur di "riportare" un numero sufficientemente grande di volte il più piccolo dei due si otterrà alla fine un segmento più grande dell'altro.

In figura:



Tale idea può essere sfruttata anche nel contesto dei numeri reali. Siano dati due numeri reali x ed y. Supponiamo che sia $0 < x < y$: è allora possibile trovare un multiplo di x più grande di y ? Ricordiamo che multiplo vuol dire $n \cdot x$, con $n \in \mathbb{N}$ (cioè $n = \underbrace{1+1+\dots+1}_{n \text{ volte}}$, ricordando come abbiamo ricostruito i naturali all'interno dei numeri reali). La risposta a questa domanda è sì. Ma come facciamo a dimostrarlo? Un po' inaspettatamente, forse, abbiamo bisogno dell'assioma di completezza. Consideriamo $A = \{ n \cdot x : n \in \mathbb{N} \}$. Se per assurdo non riusciamo a trovare n t.c. $n \cdot x > y$, allora ciò vuol dire che y è un maggiorante per A : vale a dire che A è superiormente limitato. Sia dunque $\lambda = \sup A$ (A è non vuoto): è $n \cdot x \leq \lambda$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Ma allora si ha anche $(k+1) \cdot x \leq \leq \lambda$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Cioè $k \cdot x \leq \lambda - x$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Cioè $\lambda - x$ è anch'esso un maggiorante per A . Assurdo, perché λ è $\sup A$ e quindi dovrebbe essere il minimo dei maggioranti.

Una importante conseguenza della proprietà di Archimede è che in $\mathbb{R}$ non ci sono elementi "infinitesimi". Dire che un elemento è un infinitesimo vorrebbe dire che tale elemento è "radicalmente" più piccolo degli altri elementi "ordinari". Ciò si potrebbe esprimere dicendo che, se x è un elemento infinitesimo ed y è un elemento ordinario, x è più piccolo di ogni sottomultiplo di y . In formule, che $x < y/n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. E' evidente che questa affermazione è in contrasto proprio con la proprietà di Archimede. Si noti che l'approccio di Leibniz all'analisi era invece proprio basato sull'uso di elementi infinitesimi.

Un'altra conseguenza della proprietà di Archimede è la "densità" dei razionali nei numeri reali. Cioè il fatto che tra due numeri reali qualsiasi, purché distinti, c'è sempre un numero razionale. Per questa proprietà rinvio direttamente al C-S.

9. Un modello per $\mathbb{R}$

Un modello del sistema dei numeri reali è ottenibile a partire da $\mathbb{Q}$ in vari modi: sezioni, classi contigue, allineamenti decimali illimitati, classi di equivalenza di successioni di Cauchy. Noi utilizzeremo le "semirette razionali senza massimo proprie". Grazie a loro costruiremo un insieme $\mathcal{R}$, sul quale definiremo due operazioni $\oplus$ e $\odot$, nonché una relazione d'ordine $\circledS$ in modo che siano soddisfatti tutti gli assiomi di $\mathbb{R}$.

Definizione 1 $\rho \subseteq \mathbb{Q}$ si dice semiretta razionale senza massimo propria se:

a) per ogni $q \in \rho$, e per ogni $r \in \mathbb{Q}$, (se $r \leq q$, allora $r \in \rho$) ["semiretta razionale"]
b) per ogni $q \in \rho$, esiste $r \in \rho$ t.c. $q < r$ ["senza massimo"]
c) $\rho \neq \varnothing$, $\rho \neq \mathbb{Q}$ ["propria"] □

Indicheremo con $\bar{\mathcal{R}}$ l'insieme delle semirette razionali senza massimo, mentre l'insieme che più ci interessa, cioè $\mathcal{R}$, sarà l'insieme delle semirette razionali senza massimo proprie: ovverossia, $\mathcal{R} = \bar{\mathcal{R}} \setminus \{\varnothing, \mathbb{Q}\}$.

Si vede facilmente che una semiretta razionale senza massimo propria è ad esempio $\rho = \{ r \in \mathbb{Q} : r < 3 \}$; più in generale, dato $\bar{r} \in \mathbb{Q}$, $\{ r \in \mathbb{Q} : r < \bar{r} \}$ è un elemento di $\mathcal{R}$. Mi sembra abbastanza evidente che c'è una corrispondenza biunivoca tra questo genere di semirette e i numeri razionali. Se, per così dire, tutto finisse lì, non avremmo ottenuto niente di nuovo. La cosa invece interessante è che ci sono <u>altri tipi</u> di semirette razionali. Cioè, data $\rho \in \mathcal{R}$, non è detto che $\exists\, \bar{r} \in \mathbb{Q}$ t.c. $\rho = \{ r \in \mathbb{Q} : r < \bar{r} \}$. Ragionando in termini non formali, abbiamo per esempio la semiretta costituita da tutti i razionali "minori di $\sqrt{2}$": ovverossia $\{ x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2 \} \cup \{ x \in \mathbb{Q} : x < 0 \}$. Osservi il lettore che l'insieme appena descritto è effettivamente una semiretta razionale senza massimo propria. Ebbene, questa semiretta non individua alcun numero razionale $\bar{r}$! Cioè, non esiste alcun numero razionale $\bar{r}$ t.c. essa si possa scrivere come $\{ r \in \mathbb{Q} : r < \bar{r} \}$. Volendo immaginare quale mai sia il numero che essa individua, dobbiamo "uscire" da $\mathbb{Q}$, in quanto pesantissimi indizi portano ad indicare come sospettato numero uno $\sqrt{2}$. E così è, infatti.

Il trucco è tutto qui. L'insieme $\mathcal{R}$ delle semirette razionali senza massimo proprie contiene anche <u>altre</u> semirette oltre a quelle del tipo $\{ r \in \mathbb{Q} :$

$r<\bar{r}$ } ! Quindi l'insieme $\mathcal{R}$ in un certo senso contiene $\mathbb{Q}$, ma anche dell'altro: possiamo quindi sperare che esso ci dia quella particolarissima "estensione" di $\mathbb{Q}$ che sono i numeri reali (anticipo che sarà proprio così, anche se questa certezza l'avremo solo alla fine del paragrafo).

Naturalmente tutti avranno ben chiaro che per poter parlare di "numeri reali" non basta solo avere un insieme, ma dobbiamo anche indicare quali sono le operazioni e la relazione d'ordine. Dobbiamo pertanto affrontare un nuovo problema: come definire la "somma" di due elementi di $\mathcal{R}$, cioè: <u>come si fa a sommare</u> due semirette razionali senza massimo proprie?

Se cerchiamo di farci venire delle buone idee a partire dalle semirette "speciali", cioè quelle del tipo $\{ r\in\mathbb{Q} : r<\bar{r} \}$, rischiamo di farci portare fuori strada perché sono, per così dire, troppo semplici. In effetti, uno potrebbe pensare, date $\rho = \{ r\in\mathbb{Q} : r<\bar{r} \}$ e $\sigma = \{ r\in\mathbb{Q} : r<\bar{s} \}$, di definire $\rho+\sigma = \{ r\in\mathbb{Q} : r<\bar{r}+\bar{s} \}$. Senza dubbio è un'idea sensata, ma sfortunatamente si applica solo a queste semirette "speciali". Se prendo una generica $\rho\in\mathcal{R}$, non ho nessuna garanzia che ci sia $\bar{r}\in\mathbb{Q}$ t.c. $\rho = \{ r\in\mathbb{Q} : r<\bar{r} \}$: ma allora come facciamo?

L'idea è abbastanza semplice: possiamo sfruttare abilmente le stesse semirette "speciali" per farcela venire in mente o, quantomeno, per capirla. Date $\rho = \{ r\in\mathbb{Q} : r<\bar{r} \}$ e $\sigma = \{ r\in\mathbb{Q} : r<\bar{s} \}$, si vede facilmente che $\{ r\in\mathbb{Q} : r<\bar{r}+\bar{s} \}$ è anche uguale a

$$(\star) \qquad \{ r\in\mathbb{Q} : \text{esiste } p\in\rho \text{ ed esiste } q\in\sigma \text{ t.c. } r=p+q \}$$

a parole, è la semiretta ottenuta nel modo seguente: prendiamo un elemento di ρ ed un elemento di σ e li sommiamo, e facciamo così per ogni possibile scelta di un elemento in ρ e di un elemento in σ.

Ebbene, l'espressione $(\star)$ non solo ci ridà $\rho+\sigma$, ma ha anche un pregio fondamentale: <u>non fa intervenire</u> affatto $\bar{r}$ ed $\bar{s}$! Quindi possiamo usare la stessa idea per definire in generale la somma di due semirette, anche se non sono di quelle "speciali". Ed è proprio quello che faremo.

Passando alla definizione formale, definiremo la somma $\oplus:\mathcal{R}\times\mathcal{R}\longrightarrow\mathcal{R}$ nel modo seguente: date $\rho,\sigma\in\mathcal{R}$, poniamo:

$$\rho\oplus\sigma = \{ r\in\mathbb{Q} : \text{esiste } p\in\rho \text{ ed esiste } q\in\sigma \text{ t.c. } r=p+q \}$$

E' lasciato al lettore vedere che effettivamente $\oplus$ è definita su tutto $\mathcal{R}\times\mathcal{R}$

ed è a valori in $\mathcal{R}$ (quindi, in particolare, che $\rho\oplus\sigma$ è un elemento di $\mathcal{R}$). Ugualmente il lettore proverà che $\oplus$ soddisfa gli assiomi 1÷4: si noti che "0" = $= \{ q\in\mathbb{Q} : q<0 \}$ è l'elemento neutro di $\mathcal{R}$ rispetto a $\oplus$.

La definizione di $\odot : \mathcal{R}\times\mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$ è un po' più elaborata. Premettiamo che, dato A sottoinsieme di $\mathbb{Q}$ che soddisfa b), indicheremo con τ_A il seguente insieme: $\{ q\in\mathbb{Q} :$ esiste $r\in A$ t.c. $q\le r \}$. Intuitivamente, τ_A e' la semiretta "generata" da A . Ovviamente è lasciato al lettore provare che $\tau_A\in\bar{\mathcal{R}}$. Indichiamo con $\mathcal{R}_\oplus = \{ \rho\in\mathcal{R} :$ esiste $q>0$ t.c. $q\in\rho \}$. Data $\rho\in\mathcal{R}_\oplus$, indichiamo con $\rho^+ = \{ q\in\rho : q>0 \}$: si noti che ρ^+ soddisfa la condizione b). Dati $\rho,\sigma\in\mathcal{R}_\oplus$, definiamo $\rho\odot\sigma = \tau_G$, dove $G = \{ r\in\mathbb{Q} :$ esiste $p\in\rho^+$ ed esiste $q\in\sigma^+$ t.c. $r=p\cdot q \}$ Si noti che G soddisfa b) e quindi $\tau_G\in\bar{\mathcal{R}}$. Inoltre, poiché $G\neq\emptyset$ ed esiste $s\in\mathbb{Q}$ t.c. $s\notin G$, possiamo affermare che $\tau_G\in\mathcal{R}$.

Per definire $\odot$ su tutto $\mathcal{R}\times\mathcal{R}$, ci si ispira alle "regole dei segni". Intanto, occorre provare che, data $\rho\in\mathcal{R}$, si possono verificare solo tre possibilità mutuamente escludentesi: $\rho\in\mathcal{R}_\oplus$, $\ominus\rho\in\mathcal{R}_\oplus$ (con $\ominus\rho$ indichiamo l'opposto di ρ rispetto a $\oplus$), ρ = "0" = $\{ q\in\mathbb{Q} : q<0 \}$. Provato ciò, la definizione di $\odot$ si può dare caso per caso. Ad esempio, se $\rho\in\mathcal{R}_\oplus$ e σ è t.c. $\ominus\sigma\in\mathcal{R}_\oplus$, definiamo $\rho\odot\sigma = \ominus(\rho\odot(\ominus\sigma))$. E così via... E' lasciata al lettore <u>molto</u> paziente la verifica che $\oplus$ e $\odot$ soddisfano tutti gli assiomi 1÷10.

Resta la relazione d'ordine su $\mathcal{R}$.

Date $\rho,\sigma\in\mathcal{R}$, diremo che $\rho\circledcirc\sigma$ se $\rho\subseteq\sigma$. E' immediato verificare che $\circledcirc$ gode delle proprietà 11,12 e 13 (è conseguenza del fatto che $\subseteq$ è una relazione d'ordine). Meno scontato è che $\circledcirc$ sia totale, cosa che ora proveremo. Siano dunque $\rho,\sigma\in\mathcal{R}$ t.c. $\rho\circledcirc\sigma$ e $\sigma\circledcirc\rho$ siano entrambe false. Ciò significa che $\rho\subseteq\sigma$ e $\sigma\subseteq\rho$ sono entrambe false: pertanto esiste $x\in\rho$ t.c. $x\notin\sigma$ ed esiste $y\in$ $\in\sigma$ t.c. $y\notin\rho$. Ovviamente $x\neq y$. Supponiamo che sia $x<y$ (altrimenti basterà scambiare i ruoli di x e y): si ha subito una contraddizione, perché F è una semiretta ed essendo $x<y$ deve essere $x\in\sigma$.

Verifichiamo infine che $\circledcirc$ soddisfa la proprietà 17, ovvero "l'esistenza del sup". Sia dunque $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{R}$, $\mathcal{A}$ non vuoto e superiormente limitato. Sia $\zeta = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \alpha$: proveremo che $\zeta\in\mathcal{R}$ e che $\zeta = \sup\mathcal{A}$.

Poiché gli elementi di $\mathcal{A}$ sono semirette razionali, è $\alpha \subseteq \mathbb{Q}$ per ogni $\alpha \in \mathcal{A}$ e quindi $\zeta = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \alpha \subseteq \mathbb{Q}$. Verifichiamo che ζ soddisfa a), b) e c).

Cominciamo con c). Poiché $\mathcal{A}$ è superiormente limitato, esiste $\sigma \in \mathcal{R}$ t.c. $\alpha \circledS \sigma \quad \forall\ \alpha \in \mathcal{A}$. Vale a dire, esiste $\sigma \in \mathcal{R}$ t.c. $\alpha \subseteq \sigma$ per ogni $\alpha \in \mathcal{A}$. E quindi $\zeta = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \alpha \subseteq \sigma$: poiché $\sigma \in \mathcal{R}$, $\sigma \neq \mathbb{Q}$ e quindi $\zeta \neq \mathbb{Q}$. Poiché $\alpha \neq \varnothing$ per ogni $\alpha \in \mathcal{A}$, e poiché $\mathcal{A} \neq \varnothing$, segue che $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \alpha \neq \varnothing$ [la unione di una famiglia <u>non</u> <u>vuota</u> di insiemi non vuoti è non vuota. Si noti che se fosse $\mathcal{A} = \varnothing$ avremmo $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \alpha = \varnothing$, che è una semiretta razionale senza massimo ma non è propria, quindi sta in $\bar{\mathcal{R}}$ ma non sta in $\mathcal{R}$].

Per quanto riguarda a), sia $q \in \zeta$ e $r \leq q$. Poiché $q \in \zeta$, esiste $\bar{\alpha} \in \mathcal{A}$ t.c. $q \in \bar{\alpha}$. Dato che $\bar{\alpha}$ soddisfa a), $r \in \bar{\alpha}$. E allora si ha $r \in \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \alpha$.

Per il punto b), infine, supponiamo per assurdo che esista $\bar{r} \in \zeta$ t.c. $q \leq \bar{r}$ per ogni $q \in \zeta$. Se $\bar{r} \in \zeta$, esiste $\bar{\alpha} \in \mathcal{A}$ t.c. $\bar{r} \in \bar{\alpha}$. Non può esistere $q \in \bar{\alpha}$ t.c. $q > \bar{r}$ poiché se così fosse avremmo che $q \in \zeta$ e $q > \bar{r}$, quindi $\bar{r}$ non sarebbe massimo per ζ . Ma allora $\bar{r}$ è massimo per $\bar{\alpha}$, il che è assurdo perché $\bar{\alpha}$ soddisfa b). Abbiamo quindi provato che $\zeta \in \mathcal{R}$.

Resta da provare che $\zeta = \sup \mathcal{A}$. Che ζ sia maggiorante per $\mathcal{A}$, cioè che $\beta \circledS \zeta$ per ogni $\beta \in \mathcal{A}$, è conseguenza del fatto che se $\beta \in \mathcal{A}$, allora $\beta \subseteq \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \alpha = \zeta$. Infine, ζ è il minimo dei maggioranti. Infatti, sia $\mu \in \mathcal{R}$ un maggiorante per $\mathcal{A}$. Ciò vuol dire che $\alpha \circledS \mu$ per ogni $\alpha \in \mathcal{A}$. Cioè $\alpha \subseteq \mu$ per ogni $\alpha \in \mathcal{A}$. E quindi $\zeta = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \alpha \subseteq \mu$. Cioè, $\zeta \circledS \mu$.

Due considerazioni finali

*) si invita a riflettere sul problema 1 a pag 37 del C-S

**) Si può provare che $\bar{\mathcal{R}}$, cioè l'insieme delle semirette razionali senza massimo, fornisce un modello per $\bar{\mathbb{R}}$ [vedasi C-S a pag 36]. In particolare, $+\infty$ sarà rappresentato dalla semiretta $\mathbb{Q}$, mentre $-\infty$ sarà rappresentato da $\varnothing$.

10. Confronto con gli assiomi di C-S

In questo breve paragrafo proverò a grandi linee l'equivalenza tra gli assiomi per $\mathbb{R}$ che ho utilizzato e quelli usati nel C-S. Tenuto conto dell'approccio seguito da questo testo che privilegia l'assioma del sup, proverò l'equivalenza tra gli assiomi del C-S e gli assiomi 1÷15 e 17 della tabella. Abbiamo già dimostrato l'equivalenza tra gli assiomi 1÷16 e il gruppo di assiomi 1÷15 e 17, pertanto per questa via otteniamo il risultato desiderato.

Abbiamo quindi da dimostrare che gli assiomi 1÷15 e 17 congiuntamente sono equivalenti al complesso delle proprietà 8.1÷8.7 del C-S.

Cominciamo a dimostrare che gli assiomi 1÷15 e 17 implicano gli assiomi del C-S.

Che 1÷10 implichino le proprietà 8.1÷8.5 è ovvio (si vede anzi immediatamente che si tratta di due gruppi di assiomi tra di loro equivalenti). Poiché 17 non è altro che la proprietà 8.7, resta solo da ottenere la proprietà 8.6. La prima cosa da fare è individuare $\mathbb{R}_+$. Definiamo $\mathbb{R}_+ = \{ x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \text{ e } 0 \neq x \}$.

Proviamo che vale 8.6, parte i), per quanto riguarda $\cdot$. Se $a,b \in \mathbb{R}_+$, grazie a 15 ottengo che $0 \leq a \cdot b$ (si scelga $x=0$, $y=a$, $z=b$ e si tenga conto del fatto che $0 \cdot b = 0$, come a suo tempo dimostrato). Per poter affermare che $a \cdot b \in \mathbb{R}_+$, devo ancora dimostrare che $a \cdot b \neq 0$. Ma non può essere $a \cdot b = 0$, essendo $a,b \neq 0$ (che $a,b \neq 0$ è dovuto al fatto che essi appartengono ad $\mathbb{R}_+$; che da ciò si possa dedurre $a \cdot b \neq 0$ è dovuto alla R.9 a pag. 29 del C-S).

Con considerazioni similari si prova anche 8.6, parte i), per il $+$.

Per provare 8.6, parte ii), sia $a \neq 0$. Dobbiamo provare che $a \in \mathbb{R}_+$ oppure (<u>or</u> <u>esclusivo</u>, ovverossia <u>aut</u>) $-a \in \mathbb{R}_+$. Intanto proviamo che almeno una delle due circostanze si verifica. Sia dunque $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Se $a \notin \mathbb{R}_+$, vuol dire che $a \leq 0$ (grazie all'assioma 14). Usando 15, otteniamo che $a+(-a) \leq -a$. Cioè $0 \leq -a$. E quindi che $-a \in \mathbb{R}_+$ (essendo $a \neq 0$, e pertanto anche $-a \neq 0$, come si prova facilmente: vedi R.2 e R.5). Resta ormai solo da ottenere che non si verificano contemporaneamente $a \in \mathbb{R}_+$ e $-a \in \mathbb{R}_+$. Ma se così fosse, si avrebbe $0 \leq a$ e $0 \leq -a$. Da cui, per l'assioma 15, $a = 0+a \leq (-a)+a = 0$. Abbiamo quindi $0 \leq a$ e $a \leq 0$: grazie all'assioma 12 si ottiene che $a = 0$. Impossibile perché avevamo supposto $a \neq 0$.

Proviamo che 8.1÷8.7 implicano 1÷15 e 17. Per quanto già osservato, il problema è riuscire a provare che valgono 11÷15. A tale scopo, occorre per prima cosa <u>definire</u> $\leq$. Lo faremo, ovviamente, usando il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ fornito dalla 8.6, cioè $\mathbb{R}_+$. Diremo, dati $x,y \in \mathbb{R}$, che $x \leq y$ se $y-x \in \mathbb{R}_+$ oppure (<u>vel</u>) $y-x=0$. Che valgano le proprietà 11÷14, lo si ottiene con ragionamenti simili a quelli esposti nel C-S a pag. 29. Per la proprietà 15, si rinvia alla dimostrazione delle R.11 e R.12, sempre su C-S a pag. 30.

11. I numeri complessi

Come si può desumere dai termini usati in questo contesto (unità immaginaria, numeri complessi), c'è una certa aura di mistero attorno a tali numeri. In realtà, non presentano nulla di misterioso, certo non più dei numeri "reali": se uno non ha obiezioni da fare a proposito dei numeri reali, è alquanto strano che abbia da ridire sulla presentazione usuale, "moderna" dei numeri complessi.

I numeri complessi non sono altro che $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, cioè $\mathbb{R}^2$, sul quale sono definite in modo opportuno due operazioni.

Definizione 1

$$(a,b)+(c,d) = (a+c,b+d)$$
$$(a,b)\cdot(c,d) = (a\cdot c-b\cdot d,a\cdot d+b\cdot c)\ .\square$$

Per noi i numeri complessi non saranno altro che $\mathbb{R}^2$ con queste due operazioni[7], ed useremo il simbolo $\mathbb{C}$ per riferirci appunto a questa struttura.

E' più noioso che difficile verificare che queste operazioni godono delle proprietà 1÷10, cioè che $\mathbb{R}^2$ con queste proprietà risulta essere un "corpo commutativo" o "campo" (si noti che non solo i numeri reali, ma anche i razionali sono un corpo commutativo).

E' per esempio immediato vedere che $(0,0)$ è l'elemento neutro per l'operazione $+$ e che $(1,0)$ è l'elemento neutro per l'operazione $\cdot$.

La validità delle proprietà associativa e commutativa è una conseguenza immediata del fatto che tali proprietà valgono per le operazioni in $\mathbb{R}$. Ad esempio:

$(a,b)\cdot(c,d) =$	per definizione di $\cdot$ in $\mathbb{C}$
$= (a\cdot c-b\cdot d,a\cdot d+b\cdot c) =$	per la proprietà commutativa in $\mathbb{R}$
$= (c\cdot a-d\cdot b,d\cdot a+c\cdot b) =$	per definizione di $\cdot$ in $\mathbb{C}$
$= (c,d)\cdot(a,b)$	

L'opposto di (a,b) è ovviamente $(-a,-b)$. Un po' meno ovvio è chi sia il reciproco di (a,b) , con $(a.b) \neq (0,0)$: si tratta di trovare (x,y) t.c. $(a,b)\cdot(x,y) = (1,0)$. Ovverossia $\begin{cases} a\cdot x-b\cdot y = 1 \\ a\cdot y+b\cdot x = 0 \end{cases}$. Da cui $(x,y) = \left(\dfrac{a}{a^2+b^2},\dfrac{-b}{a^2+b^2}\right)$.

[7] Sarebbe forse stato più opportuno usare due simboli diversi dai soliti $+$ e $\cdot$, per non fare confusione con le operazioni di $\mathbb{R}$, ma spero che questa annotazione sia sufficiente.

Lascio al lettore il compito di provare che vale la proprietà distributiva.

Questi sono i numeri complessi.

Invito però a questo punto lo studente troppo disposto ad accettare qualunque cosa gli venga propinata, a chiedersi: ma che fine ha fatto i ? In fondo, i numeri complessi vengono fuori proprio dal problema di risolvere equazioni come $x^2 = -1$ che non hanno soluzioni reali (anche se questa non è l'origine storica dei numeri complessi). E poi si è abituati a vedere un numero complesso come un qualcosa del tipo $a+ib$, non come un elemento di $\mathbb{R}^2$ (anche se di solito si sa che i numeri complessi si possono rappresentare sul cosiddetto piano di Argand-Gauss[8]).

Proveremo pertanto che esiste in $\mathbb{C}$ un numero il cui quadrato fa -1 , e pertanto lo possiamo chiamare i secondo la consuetudine. Non solo, faremo anche vedere come (a,b) non sia altro che il solito $a+ib$.

Proposizione 1 $(0,1)\cdot(0,1) = (-1,0)$.□

Dimostrazione Basta usare la definizione di $\cdot$ in $\mathbb{C}$.□

Abbiamo quindi che $(0,1)^2 = (-1,0)$. Il mio problema è di far capire come mai $(-1,0)$ sia sostanzialmente lo stesso che $-1 \in \mathbb{R}$.

L'idea chiave è che i numeri complessi del tipo $(a,0)$ si comportano in tutto e per tutto come i numeri reali. In effetti, $(x,0)+(y,0) = (x+y,0)$ e $(x,0)\cdot(y,0) = (x\cdot y,0)$: come si vede, le operazioni su $\mathbb{C}$, ristrette al sottoinsieme $E = \{ (x,y) \in \mathbb{C} : y = 0 \}$, si comportano esattamente come le operazioni in $\mathbb{R}$. Possiamo anche vedere le cose nel modo seguente: è come se usassimo delle notazioni diverse per indicare i numeri reali, scrivendo $(x,0)$ anziché x (come se scrivessimo $\mathscr{x}$ o $\mathring{x}$, anziché x). Da un altro punto di vista ancora, possiamo stabilire una corrispondenza biunivoca $\psi: \mathbb{R} \longrightarrow E$, definendo $\psi(x) = (x,0)$. Tale ψ non solo è una corrispondenza biunivoca, ma rispetta anche le operazioni: è cioè un isomorfismo tra $\mathbb{R}$ ed E .

Pertanto, possiamo identificare E con $\mathbb{R}$: quindi è tollerabile scrivere a anziché $(a,0)$ per brevità. La presenza dell'isomorfismo sopra individuato permette di fare i calcoli indifferentemente usando $\mathbb{R}$ oppure E .

Proposizione 2 Per ogni numero complesso (a,b) si ha:

[8] A dire la verità, spesso non è molto chiaro cosa ci sia di diverso tra il piano di Argand-Gauss e il solito "piano cartesiano": semplicemente ci si disinteressa del problema (ci si accontenta di dire che l'asse delle y è l'asse immaginario e tutto finisce lì), alimentando l'aura di mistero attorno ai numeri complessi.

$$(a,b) = (a,0)+(0,1)\cdot(b,0)\ .\square$$

Dimostrazione Basta usare la definizione delle operazioni in $\mathbb{C}$.□

Siamo a posto. Se decidiamo di usare il simbolo i per indicare il numero complesso $(0,1)$, possiamo ottenere la cosiddetta forma algebrica dei numeri complessi. Cioè, dato (a,b) , abbiamo che $(a,b) = \underset{\substack{\downarrow\\ a}}{(a,0)}+\underset{\substack{\downarrow\\ i}}{(0,1)}\cdot\underset{\substack{\downarrow\\ b}}{(b,0)}$ e quindi possiamo scrivere (a,b) come $a+ib$.

Non solo: $(0,1)^2 = (-1,0)$, cioè possiamo scrivere $(0,1)^2 = -1$, ovverossia $i^2 = -1$.

Abbiamo quindi ritrovato la cosiddetta "forma algebrica" dei numeri complessi. Abbiamo cioè che (a,b) può essere scritto come $a+ib$. Non solo, ma se con questa scrittura usiamo le solite regole dell'algebra applicate ai polinomi (cioè trattiamo i come una incognita, con la curiosa proprietà che $i^2 = -1$), otteniamo esattamente le operazioni come le avevamo definite in $\mathbb{C}$. Infatti:

$(a+ib)+(c+id) = (a+c)+i(b+d)$ e

$(a+ib)\cdot(c+id) = ac+i(ad+bc)+i^2bd = (ac-bd)+i(ad+bc)$.

Questo mostra che i numeri complessi, come li abbiamo visti in questo paragrafo, sono esattamente la stessa cosa che uno eventualmente già conosceva. Ho scelto quel tipo di approccio ai complessi perché ha il pregio di essere il meno "misterioso": avrei anche potuto usare direttamente la simbologia $a+ib$, intendendola come scrittura formale, ma seguire questa strada richiede una maggiore astrazione.

Concludo accennando ad un aspetto interessante di $\mathbb{C}$.

Probabilmente a qualcuno sarà capitato di osservare che i numeri complessi non si confrontano tra loro (nelle scuole precedenti non avete mai imparato a risolvere disequazioni in $\mathbb{C}$, né io ho introdotto una relazione d'ordine su $\mathbb{C}$). Come mai? La risposta è molto drastica: non è possibile definire su $\mathbb{C}$ una relazione d'ordine totale che "rispetti le operazioni". Cioè non si può definire una relazione $\sqsubseteq$ che sia una relazione d'ordine totale e per cui valgano le seguenti proprietà, (analoghe alla proprietà 15 dei numeri reali, vedi tabella):

$$\begin{cases} \text{per ogni terna } x,y,z \text{ di numeri complessi, si ha:} \\ x \sqsubseteq y \text{ implica } x+z \sqsubseteq y+z \quad \text{e} \\ (\, x \sqsubseteq y \text{ e } 0 \sqsubseteq z\,) \text{ implica } x\cdot z \sqsubseteq y\cdot z \end{cases}$$

Potremmo anche provare questo fatto (non è neanche troppo difficile) ma a me interessava solo far notare questo aspetto curioso dei numeri complessi.

12. Sommario e conclusioni

In questo primo capitolo ci siamo solo occupati di numeri. Sono partito col richiamare succintamente le proprietà delle operazioni e della relazione d'ordine in $\mathbb{Q}$, principalmente a scopo introduttivo per gli assiomi di $\mathbb{R}$. Ripeto che a partire da quegli assiomi costruiremo tutto l'edificio dell'analisi, come se fossero dei mattoni.

A partire dagli assiomi ho prima di tutto dimostrato alcune delle proprietà dei numeri reali, più che altro a scopo esemplificativo.

Ho poi affrontato le conseguenze più rilevanti, cioè quelle che mettono in gioco l'assioma di completezza, ottenendo così la proprietà archimedea e la proprietà del sup . Il ruolo di queste due proprietà sarà evidente sin dal prossimo capitolo, dedicato alle successioni e ai limiti di successioni.

Ho provato l'equivalenza tra il sistema assiomatico per $\mathbb{R}$ presentato dal C-S e quello adottato in queste dispense. Uno potrebbe ragionevolmente chiedersi perché, visto che sono equivalenti, non ho adottato direttamente la lista degli assiomi usata sul C-S. La ragione è la seguente: ho preferito, a scapito della rapidità, presentare un sistema di assiomi che esaltasse le connessioni tra le diverse strutture presenti su $\mathbb{R}$. Si tratta degli assiomi 9 e 15: il primo traccia un legame evidente tra le due operazioni, il secondo connette le operazioni alla struttura d'ordine presente su $\mathbb{R}$. Questa è la ragione fondamentale per cui ho adottato gli assiomi della tabella anziché direttamente quelli di C-S.

L'approccio assiomatico che ho adottato pone due ordini di problemi.

Uno è di carattere didattico: è un approccio che può risultare eccessivamente astratto, difficile da capire veramente. Questo può essere lo scotto da pagare per la chiarezza, rapidità ed efficienza che invece offre. Non va comunque dimenticato, d'altronde, che i numeri reali sono "intrinsecamente difficili": non c'è nessuna strada facile per arrivarci.

L'altro ordine di problemi è di carattere sostanziale: descrivendo i numeri reali solo mediante una lista di assiomi, non si ha la garanzia che un tale ente ci sia. Ecco la ragione per la quale mi sono sentito in dovere di offrire un modello di $\mathbb{R}$, elaborato a partire dai numeri razionali. Ma ci sono anche altri problemi, come quello della sostanziale unicità o meno dell'ente individuato dagli assiomi dati, problema al quale ho poco più che accennato. Altre problematiche, generalmente caratteristiche dell'approccio assiomatico, non le ho neppure sfiorate.

Il capitolo poi si chiude con una rapida descrizione dei numeri complessi, introdotti come coppie ordinate di numeri reali, ma per i quali ho anche indicato la connessione con l'usuale scrittura algebrica.

Appendice. Il principio di induzione

Vi sono varie formulazioni.

Ne richiamo due: una "logica" e una "insiemistica".

Ma prima una precisazione sulle notazioni: ricordo che per me $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$. C'è chi mette anche lo zero in $\mathbb{N}$ (tipicamente gli algebristi, ma non solo): io ho invece l'abitudine di non mettercelo. Per quello che vedremo non c'è alcuna differenza significativa.

Sia P una proprietà che dipende da $n \in \mathbb{N}$. Essa può dipendere da altre variabili, ma questo non ci interessa. Per sottolinearne la dipendenza da n indicheremo quindi con $P(n)$ tale proprietà.

1° FORMULAZIONE:

$$[\ P(1) \quad e \quad (\ \forall\ m \in \mathbb{N}\ (\ P(m) \Rightarrow P(m+1)\ )\ )\ ] \quad \Rightarrow \quad [\ \forall\ k \in \mathbb{N}\ P(k)\ ]\ .\square$$

Tradotto in parole, vuol dire che se abbiamo una proprietà tale che:

vale per 1

e tale che

ogni qual volta vale per n , allora vale per $n+1$,

allora tale proprietà vale per ogni n .

Un po' di terminologia: la proposizione $P(1)$ si dice "base", la proposizione $(\ \forall\ m \in \mathbb{N}\ (\ P(m) \Rightarrow P(m+1)\ )$ si dice "passo induttivo", la proposizione $P(m)$ si dice "ipotesi induttiva".

2° FORMULAZIONE: Sia $E \subseteq \mathbb{N}$.

$$[\ 1 \in E \quad e \quad (\ \forall\ m \in \mathbb{N}\ (\ m \in E \Rightarrow m+1 \in E\ )\ )\ ] \quad \Rightarrow \quad [\ E = \mathbb{N}\ ]\ .\square$$

E' facile provare l'equivalenza di queste due formulazioni: è una sorta di gioco di traduzione da un linguaggio a un altro.

Esercizio 1 Dimostrarlo. Suggerimento (ovvio...): data P , si definisca E come l'insieme dei naturali per cui P è vera. Viceversa...□

Di solito il principio di induzione viene presentato come un principio valido, senza preoccuparsi di vedere se derivi da altri principi "precedenti". Volendo, lo si può dedurre dagli assiomi della teoria degli insiemi, nel contesto degli insiemi "bene ordinati": chi fosse interessato può consultare per esempio Kelley (John L. Kelley: *"General Topology"*, Van Nostrand, Princeton, 1955) a pagg. 250 e segg. (in particolare il teorema 137 a pag. 272). Il principio di induzione è anche al cuore della definizione assiomatica di $\mathbb{N}$ data da Peano: è il 5° postulato. Ricordo, infine, che il principio di induzione matematica può essere visto come una conseguenza degli assiomi di $\mathbb{R}$ (campo ordinato e completo):

vedasi, per esempio, ancora Kelley oppure Apostol (Tom M. Apostol: *"Calculus"*, vol. 1, Blaisdell, Waltham (MA), 1967; 1° edizione: 1961; c'è traduzione italiana edita da Boringhieri)[1].

E' interessante notare come dal principio di induzione si ottengano le seguenti proprietà:

- principio di "buon ordinamento". Ovverossia, ogni sottoinsieme di $\mathbb{N}$ ha minimo (in realtà questo principio è equivalente al principio di induzione)
- principio di induzione "esteso"
- ogni sottoinsieme finito di $\mathbb{N}$ ha massimo
- possibilità di dare definizioni per ricorrenza (vedi sotto)

Proviamo, tanto per fare un po' di esercizio, che si può ricavare il principio di "buon ordinamento" dal principio di induzione.

Teorema 1 Ogni sottoinsieme di $\mathbb{N}$ ha elemento minimo.

Dimostrazione (per induzione, ovviamente!).

Lo dimostro per induzione sul numero di elementi di questo insieme. Più che altro stiamo attenti a darne una formulazione precisa. Seguiamo l'approccio "logico".

Indichiamo con $P(n)$ la seguente proposizione:

"ogni s.i. di $\mathbb{N}$ che ha n elementi ha minimo"

Ovviamente $P(1)$ è vera.

Sia quindi $k \in \mathbb{N}$ e supponendo che sia vera $P(k)$ dimostriamo che vale $P(k+1)$. Consideriamo allora un s.i. A di $\mathbb{N}$ con $k+1$ elementi: $A = \{n_1,...,n_{k+1}\}$. Consideriamo $\{n_1\}$ ed $\{n_2,...,n_{k+1}\}$. Poiché quest'ultimo ha k elementi, esso ha minimo (per l'ipotesi induttiva): sia n_j questo elemento minimo.

Consideriamo ora $\{n_1,n_j\}$. Esso ha ovviamente minimo per la ipotesi induttiva e quindi non resta che fare l'ovvia verifica che tale minimo è anche il minimo di A .□

---

[1] Brevemente, si fa così. Abbiamo a disposizione $\mathbb{R}$ che è un campo ordinato e completo. Diciamo che un sottoinsieme A è un "insieme induttivo" se:

$$1 \in A \quad e \quad \forall x \in \mathbb{R} \, (x \in A \Rightarrow x+1 \in A) \, ;$$

dopo di che si definiscono "naturali" gli elementi di $\mathbb{R}$ che stanno in ogni insieme induttivo. Detto ω l'insieme dei "naturali", è evidente che ω è un insieme induttivo e che ω è contenuto in ogni insieme induttivo. A questo punto il principio di induzione si può esprimere come teorema: ogni s.i. induttivo di ω coincide con ω .

Esercizio 2 La dimostrazione precedente è sbagliata. Dove è l'errore?□

Per quanto concerne il principio di induzione esteso, esso consiste nel sostituire all'ipotesi induttiva $P(m)$ la seguente:

$$\forall\ j \in \{1,\ldots,m\}\ P(j)$$

ovverossia, meno formalmente, si tratta si supporre la validità della proposizione non solo per m ma anche per tutti i naturali minori o uguali di m . E' evidente che questa versione è più forte del principio di induzione tradizionale, d'altronde è facile dimostrare che le due versioni sono in realtà equivalenti.

Esercizio 3 Provare l'equivalenza di queste due versioni.□

Esercizio 4 Provare che ogni sottoinsieme finito di $\mathbb{N}$ ha massimo.□

Riguardo alle definizioni per ricorrenza, esse godono un po' dello stesso "status" del principio di induzione. Ovvero, tutti sanno che ci sono, però potrebbero avere imbarazzo a dover dire precisamente come diavolo sia fatta una definizione per ricorrenza. Si tratta però di un imbarazzo molto minore se ci si pone il problema di capire come dal principio di induzione si possa introdurre una formulazione sensata di "come è fatta" una definizione per induzione. Un approccio molto semplice lo si trova, per esempio, su C-S.

Teorema 2 (definizione per ricorrenza) Sia dato un insieme A ed una applicazione $f{:}\mathbb{N}\times A \longrightarrow A$, nonché $a \in A$. Allora esiste una ed una sola applicazione $g{:}\mathbb{N} \longrightarrow A$ t.c.:

1 $g(1) = a$

2 $\forall\ n \in \mathbb{N}\ \ g(n+1) = f(g(n),n)$.□

Dimostrazione Ovviamente per induzione.

Riporto la dimostrazione di C-S, che usa la "2° formulazione", o "insiemistica".

Dimostriamo dapprima che g è unica.

Siano $g,g'{:}\mathbb{N} \longrightarrow A$ due applicazioni soddisfacenti 1 e 2.

Sia $S = \{\ n \in \mathbb{N} :\ g(n) = g'(n)\ \}$.

Allora, per 1, $1 \in S$. Se poi $n \in S$, dall'ipotesi induttiva $g(n) = g'(n)$ segue che

$$g(n+1) = f(g(n),n) = f(g'(n),n) = g'(n+1)\ .$$

Vediamo ora che davvero esiste una funzione g come affermato. Sia $E \subseteq \mathbb{N}$ l'insieme dove è definita una funzione g soddisfacente 1 e 2. Proviamo che $E = \mathbb{N}$, ovviamente per induzione e seguendo la strada insiemistica. Basta osservare che, grazie ad 1, $1 \in E$ e che, grazie a 2, se $n \in E$, allora $n+1 \in E$.□

Esercizio 5 Sia $a = 1$ e $f:\mathbb{N}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita come $f(n,x) = = x+2n+1$. E' vero che $g(n) = n^2$?□

Chi ama invece le cose complicate, può deliziarsi con la definizione per ricorrenza (e teoremi relativi) che si trova su Kelley.

Esercizio 6 Dimostrare che $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ e che $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.□

Esercizio 7 (da Apostol, che lo accredita a G. Pólya) Trovare dove è l'errore...

"Dimostriamo" per induzione la seguente affermazione:

"sia dato un insieme di n ragazzi biondi: se uno di loro ha gli occhi azzurri, allora hanno tutti gli occhi azzurri".

L'affermazione è ovvia per $n = 1$. Per passare da k a $k+1$, si può procedere nel modo descritto qui appresso per $k = 3$. Supponiamo quindi che l'affermazione sia vera per $k = 3$ e siano B_1,B_2,B_3,B_4 quattro ragazzi biondi di cui almeno uno (assumiamo sia B_1) ha gli occhi azzurri. Prendendo B_1,B_2,B_3 insieme e usando il fatto che l'affermazione è vera per $n = 3$, otteniamo che anche B_2 e B_3 hanno gli occhi azzurri. Ripetiamo la procedura con B_1,B_2,B_4 e troviamo che anche B_4 ha gli occhi azzurri. E' ovvio come queste considerazioni si possano adattare per passare in generale da k a $k+1$.□

TABELLA DEGLI ASSIOMI DI $\mathbb{R}$

nome della proprietà	*proprietà (descrizione formale)*	*note*
1) COMMUTATIVA (+)	$\forall\, x,y \in \mathbb{R} \quad x+y=y+x$	si dimostra che l'elemento neutro per + è unico lo si indica con 0 (proprietà 1–3)
2) ASSOCIATIVA (+)	$\forall\, x,y,z \in \mathbb{R} \quad (x+y)+z=x+(y+z)$	
3) ESISTENZA ELEMENTO NEUTRO (+)	$\exists\, a \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad a+x=x$	
4) ESISTENZA OPPOSTO (+)	$\forall\, x \in \mathbb{R}\ \exists\, y \in \mathbb{R}$ t.c. $x+y=0$	si dimostra che l'opposto di x è unico e lo si indica con $-x$
5) COMMUTATIVA (·)	$\forall\, x,y \in \mathbb{R} \quad x\cdot y=y\cdot x$	si dimostra che l'elemento neutro per · è unico lo si indica con 1 (proprietà 5–7)
6) ASSOCIATIVA (·)	$\forall\, x,y,z \in \mathbb{R} \quad (x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$	
7) ESISTENZA ELEMENTO NEUTRO (·)	$\exists\, a \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad a\cdot x=x$	
8) ESISTENZA OPPOSTO (+, ·)	$\forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\ \exists\, y \in \mathbb{R}$ t.c. $x\cdot y=1$	si dimostra che il reciproco di x è unico e lo si indica con x^{-1} o con $1/x$
9) DISTRIBUTIVA (+, ·)	$\forall\, x,y,z \in \mathbb{R} \quad (x+y)\cdot z=x\cdot z+y\cdot z$	
10) ESCLUSIONE CASI BANALI (+, ·)	$0 \neq 1$	
11) RIFLESSIVA (≤)	$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad x\le x$	le proprietà 11, 12 e 13 dicono che $\le$ è una relazione d'ordine
12) ANTISIMMETRICA (≤)	$\forall\, x,y \in \mathbb{R} \quad ((x\le y \text{ e } y\le x) \Rightarrow x=y)$	
13) TRANSITIVA (≤)	$\forall\, x,y,z \in \mathbb{R} \quad ((x\le y \text{ e } y\le z) \Rightarrow x\le z)$	la 14 ci dice che è anche totale
14) TOTALE (≤)	$\forall\, x,y \in \mathbb{R} \quad x\le y \text{ o } y\le x$	
15) COMPATIBILITA' TRA ORDINE E OPERAZ. (+, ·, ≤)	$\forall\, x,y,z \in \mathbb{R} \quad (x\le y \Rightarrow x+z\le y+z)$ $\forall\, x,y,z \in \mathbb{R} \quad ((x\le y \text{ e } 0\le z) \Rightarrow$ $\Rightarrow x\cdot z\le y\cdot z)$	
16) COMPLETEZZA (≤)	$\forall\, (A,B)$, coppia di classi separate, $\exists\, z \in \mathbb{R}$ t.c.: $\forall\, a \in A,\ \forall\, b \in B,\ a\le z\le b$	(A,B) è una coppia di classi separate se $A,B\subseteq\mathbb{R}$; $A,B\neq\emptyset$; $\forall\, a\in A, b\in B$ si ha $a\le b$

è importante anche la seguente proprietà

nome della proprietà	*proprietà (descrizione formale)*	*note*
17) ESISTENZA DELL'ESTREMO SUPERIORE	$\forall A \subseteq \mathbb{R}$, non vuoto e limitato superiormente, $\exists z \in \mathbb{R}$ t.c. $z = \sup A$	$A \subseteq \mathbb{R}$ è superiormente limitato se ha un maggiorante, cioè se $\exists\ m \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall\ x \in A,\ x \leq m$ sup A è il minimo dei maggioranti di A